INTEGRALI INDEFINITI DEL TIPO: $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$ e $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$

Esempi svolti

1) $\int \frac{6x}{3x^2+4} dx =$

Se poniamo che $f(x) = 3x^2 + 4$ allora avremo $f'(x) = 6x$ e quindi possiamo applicare la formula in questione e otteniamo:

$= ln|3x^2 + 4| + c = ln(3x^2 + 4) + c$

Osserviamo che $3x^2 + 4 > 0 \ \forall x \in R$ quindi il modulo si può omettere.

Vi ricordo la definizione di modulo di un numero reale:

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

Praticamente il modulo ci dà la garanzia di lavorare sempre con quantità positive o nulle.

Questo è necessario quando si lavora con i logaritmi, in quanto il logaritmo di un numero è definito solo se calcolato su un numero positivo.

2) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx =$

Se poniamo $f(x) = x^2 + x$ allora $f'(x) = 2x + 1$ e quindi possiamo applicare subito la formula:

$= ln|x^2 + x| + c$

3) $\int \frac{5}{2x-3} dx =$

Se poniamo $f(x) = 2x - 3$ allora $f'(x) = 2$ e quindi, moltiplicando e dividendo per 2 e portando fuori il 5 si ha:

$$= \frac{5}{2} \int \frac{2}{2x-3} dx = \frac{5}{2} ln|2x - 3| + c$$

4) $\int \frac{x}{x+3} dx =$ (apparentemente non rientra nel nostro caso…e invece…)

$$= \int \frac{x+3-3}{x+3} dx = \int \frac{x+3}{x+3} dx - 3 \int \frac{1}{x+3} dx =$$ (semplificando nel primo integrale) =

$$= \int 1dx - 3ln|x+3| + c = x - 3ln|x+3| + c$$

5) $\int \frac{2x-5}{x+4} dx =$ (questo sembra ancora più lontano dal nostro caso, e invece…) =

$$= \int \frac{x+x+4-9}{x+4} dx = \int \frac{x+4}{x+4} dx + \int \frac{x}{x+4} dx - 9 \int \frac{1}{x+4} dx =$$

$$= x + \int \frac{x+4-4}{x+4} dx - 9ln|x+4| + c =$$

$$= x + x - 4ln|x+4| - 9ln|x+4| + c = 2x - 13ln|x+4| + c$$

Ho volutamente saltato qualche passaggio per stimolarvi a trovare i nessi con gli esempi precedenti…

E adesso tocca a voi:

1) $\int \frac{4x+12}{x^2+6x} dx =$

2) $\int \frac{x+5}{x+3} dx =$

Il prossimo è una sfida, vi indico il primo passaggio e vi suggerisco di pensare alle scomposizioni mediante i prodotti notevoli:

3) $\int \frac{x^2+1}{x+1} dx = \int \frac{x^2+1+1-1}{x+1} dx = \int \frac{x^2-1}{x+1} dx - \int \frac{2}{x+1} dx =$